2. Хайруллин М. Х., Шамсиев М. Н., Морозов П. Е., Хисамов Р. С., Бадертдинова Е. Р., Салимьянов И. Т. *Оценка эффективности гидравлического разрыва пласта на основе гидродинамических исследований вертикальных скважин* // Нефтяное хозяйство. – 2009. – № 7. – С. 54-56.

И. М. Сарварова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

innasarvarova@rambler.ru

МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Данное сообщение можно рассматривать как некоторое продолжение работы [1], где предложен алгоритм редукции уравнений вида

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) y(t) dt \tag{1}$$

к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет выделять частные случаи разрешимости (1) в квадратурах.

Здесь изучается векторно-матричный аналог уравнения (1) с вектор-функциями $f(x)$, $y(x)$ и $m \times n$-матрицами $A(x)$, $B(x)$. Поясним идею указанного в заглавии метода на примере $n = 1$, $m = 2$, когда (1) принимает вид

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{2} \int_{x_0}^{x} a_{ji}(x) b_{ji}(t) y_j(t) dt + f_i(x), \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Рассматривая (2) при $i = 1$ как уравнение для $y_1(x)$ и решая его приемом, указанным в [1], приходим к соотношению

$$y_1(x) = f_1(x) + \\ + A_1(x)\int_{x_0}^{x} b_{11}(\xi)f_1(\xi)A_1^{-1}(\xi)d\xi + \int_{x_0}^{x} a_{21}(x)b_{21}(t)y_2(t)dt + \\ + \int_{x_0}^{x} b_{11}(\xi)\frac{A_1(x)}{A_1(\xi)}\int_{x_0}^{\xi} a_{21}(\xi)b_{21}(t)y_2(t)dtd\xi, \quad (3)$$

где $A_1(x) = \exp\int_{x_0}^{x} a_{11}(\eta)b_{11}(\eta)d\eta$.

Обозначим

$$\omega_1(x) = f_1(x) + A_1(x)\int_{x_0}^{x} b_{11}(\xi)f_1(\xi)A_1^{-1}(\xi)d\xi,$$

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} b_{11}(\xi)A_1(x)A_1^{-1}(\xi)\int_{x_0}^{\xi} a_{21}(\xi)b_{21}(t)y_2(t)dtd\xi.$$

Преобразуем двойной интеграл $I(x)$ по формуле Дирихле и введем новую функцию $B_1(x) = \int_{x_0}^{x} A_1^{-1}(\xi)b_{11}(\xi)a_{21}(\xi)d\xi$. Тогда

$$I(x) = A_1(x)\int_{x_0}^{x}[B_1(x) - B_1(t)]b_{21}(t)y_2(t)dt.$$

Поэтому (3) переписывается так:

$$y_1(x) = \omega_1(x) + \\ + \int_{x_0}^{x}\left[a_{21}(x)b_{21}(t) + A_1(x)[B_1(x) - B_1(t)]b_{21}(t)\right]y_2(t)dt.$$

Подставляем это значение в (2) при $i = 2$:

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x} a_{12}(x)b_{12}(t)\omega_1(t)dt + f_2(x) + \\ + \int_{x_0}^{x} a_{22}(x)b_{22}(t)y_2(t)dt + \int_{x_0}^{x} a_{12}(x)b_{12}(t)\int_{x_0}^{t}[a_{21}(t)b_{21}(t_1) + \\ + A_1(t)[B_1(t) - B_1(t_1)]b_{21}(t_1)]\, y_2(t_1)dt_1dt.$$

Аналогично теперь рассуждаем относительно $y_2(x)$. Вводим новые функции и преобразуем двойной интеграл:

$$B_2(x) - B_2(t) = \int_t^x b_{12}(t_1)a_{21}(t_1)dt_1,$$

$$B_3(x) - B_3(t) = \int_t^x b_{12}(t_1)A_1(t_1)B_1(t_1)dt_1,$$

$$B_4(x) - B_4(t) = \int_t^x b_{12}(t_1)A_1(t_1)dt_1.$$

Это приводит нас к уравнению

$$y_2(x) = \omega_2(x) + \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^7 a_k(x)b_k(t)y_2(t)dt. \qquad (4)$$

Понятно, что можно в только что изложенной схеме поменять местами $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то есть разрешить сначала (2) относительно $y_2(x)$, а затем подставить результат в (2) при $i = 1$. Тогда получим еще одно уравнение вида (4), но уже для функции $y_1(x)$.

В обоих случаях происходит исключение одной из искомых функций, чем и объясняется название данной заметки.

Ясно, что (4) есть частный случай (1) при $n = 7$. В соответствии с результатом из [1] это уравнение может быть сведено к $2^7 \cdot 7! = 645120$ вариантам задач Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения 7-го порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И., Сарварова И. М. *Об уравнениях Вольтерра с вырожденными ядрами* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2009. – Т. 39. – С. 213-216.